Statistics and Computing manuscript No.
(will be inserted by the editor)

Information-Theoretic Criteria for Optimizing Designs of Randomized Stepped-Wedge Clinical Trials – Supplementary Material

Belmiro P.M. Duarte · **Anthony C. Atkinson** · **Mirjam Moerbeek**

Received: date / Accepted: date

Abstract **Keywords** Optimal design of experiments · Clinical trials · Randomized stepped-wedge · Information criteria · Correlation structure.

Mathematics Subject Classification (2000) 62K05 · 90C47

1 Maximizing $\det(M)$ is Equivalent to Minimizing $[M^{-1}]_{t_{\max}+1,t_{\max}+1}$

Theorem 1 *Let M be a $(t_{\max}+1)\times(t_{\max}+1)$ symmetric positive semidefinite matrix of the form:*

$$M = \begin{pmatrix} A & b \\ b^\intercal & c \end{pmatrix}$$

where A is a $t_{\max}\times t_{\max}$ symmetric positive semidefinite matrix, b is a $t_{\max}\times 1$ column vector, and c is a scalar. Maximizing $det(M)$ is equivalent to minimizing the element $(t_{\max}+1, t_{\max}+1)$ of M^{-1}.

Proof :

Step 1: Determinant of M

Using the determinant formula for block matrices, we obtain:

$$\det(M) = \det(A)\cdot(c - b^\intercal A^{-1} b).$$

Step 2: Inverse of M

The inverse of M is given by:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + \frac{A^{-1} b b^\intercal A^{-1}}{c - b^\intercal A^{-1} b} & -\frac{A^{-1} b}{c - b^\intercal A^{-1} b} \\ -\frac{b^\intercal A^{-1}}{c - b^\intercal A^{-1} b} & \frac{1}{c - b^\intercal A^{-1} b} \end{pmatrix}.$$

Thus, the element in position $(t_{\max}+1, t_{\max}+1)$ of M^{-1} is:

$$[M^{-1}]_{t_{\max}+1,t_{\max}+1} = \frac{1}{c - b^\intercal A^{-1} b}.$$

Belmiro P.M. Duarte
Polytechnic Institute of Coimbra, ISEC, Rua Pedro Nunes, 3030–199 Coimbra, Portugal, and University of Coimbra, INESC-Coimbra, Rua Sílvio Lima — Pólo II, 3030–790 Coimbra, Portugal, and University of Coimbra, CERES, Department of Chemical Engineering, Rua Sílvio Lima — Pólo II, 3030–790 Coimbra, Portugal., E-mail: bduarte@isec.pt

Anthony C. Atkinson
Department of Statistics, London School of Economics, London WC2A 2AE, United Kingdom. E-mail: A.C.Atkinson@lse.ac.uk

Mirjam Moerbeek
Department of Methodology and Statistics, Utrecht University, PO Box 80140, 3508 TC Utrecht, The Netherlands. E-mail: m.moerbeek@uu.nl

Step 3: Establishing the Relationship

From the determinant expression:

$$\det(M) = \det(A) \cdot (c - b^\intercal A^{-1} b),$$

and the inverse element:

$$[M^{-1}]_{t_{\max}+1,t_{\max}+1} = \frac{1}{c - b^\intercal A^{-1} b},$$

it follows that maximizing $\det(M)$ for a constant $\det(A)$ is equivalent to maximizing $c - b^\intercal A^{-1} b$, which in turn minimizes $[M^{-1}]_{t_{\max}+1,t_{\max}+1}$. In our application, the constant A is the information matrix for the given blocking structure.

We note that this result follows from standard linear algebra techniques related to Schur complements, block matrix inverses, and determinant identities. While the exact formulation may not always be explicitly stated as a theorem in textbooks, we can find closely related results in Boyd and Vandenberghe (2004); Harville (1997) among others.

2 Checking Theorem (1) for a stepped wedge allocation problem

Next, we apply this result to the design of stepped wedge trials. First, we demonstrate that the FIM belongs to the class of bordered symmetric positive semidefinite matrices. We then verify the result. For simplicity, we consider the basic case where $s_{\max} = 2$ and $t_{\max} = 3$, fixing $\rho = 0.2$ and $r = 0.05$ without loss of generality. The design matrices X_s for $s \in [\![2]\!]$ are given by:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

The variance-covariance matrix V and its inverse V^{-1} are:

$$V = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.2000 & 0.0400 \\ 0.2000 & 1.0000 & 0.2000 \\ 0.0400 & 0.2000 & 1.0000 \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} 1.0417 & -0.2083 & 0.0000 \\ -0.2083 & 1.0833 & -0.2083 \\ 0.0000 & -0.2083 & 1.0417 \end{pmatrix}$$

The matrices $\mathcal{X}_{s,t}$ for $s \in [\![s_{\max}]\!]$ and $t \in [\![t_{\max}]\!]$ are as follows:

$$\mathcal{X}_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{X}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{X}_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{X}_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{X}_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{X}_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

The matrices

$$\mathcal{Z}_{s,t} = (1-r)^{t-1} r \, \mathcal{X}_{s,t}^\intercal V_{1:t,1:t}^{-1} \mathcal{X}_{s,t}$$

are given as follows:

$$\mathcal{Z}_{1,1} = \begin{pmatrix} 0.0480 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Z}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0.1113 & 0.0547 & 0.0000 & 0.0547 \\ 0.0547 & 0.0456 & 0.0000 & 0.0456 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0547 & 0.0456 & 0.0000 & 0.0456 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{Z}_{1,3} = \begin{pmatrix} 3.5020 & 1.2640 & 1.1190 & 2.3830 \\ 1.2640 & 0.9025 & 0.1805 & 1.0830 \\ 1.1190 & 0.1805 & 0.9025 & 1.0830 \\ 2.3830 & 1.0830 & 1.0830 & 2.1660 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{Z}_{2,1} = \begin{pmatrix} 0.0480 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Z}_{2,2} = \begin{pmatrix} 0.1113 & 0.0547 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0547 & 0.0456 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{Z}_{2,3} = \begin{pmatrix} 3.5020 & 1.2640 & 1.1190 & 1.1190 \\ 1.2640 & 0.9025 & 0.1805 & 0.1805 \\ 1.1190 & 0.1805 & 0.9025 & 0.9025 \\ 1.1190 & 0.1805 & 0.9025 & 0.9025 \end{pmatrix}$$

The global Fisher Information Matrix is given by

$$\mathcal{M}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \sum_{i=1}^{s_{\max}} w_i \sum_{j=1}^{t_{\max}} \mathcal{Z}_{i,j}.$$

Considering that $w_2 = 1 - w_1$, we obtain:

$$\mathcal{M}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{pmatrix} 3.6610 & 1.3180 & 1.1190 & 1.3180w_1 + 1.1190 \\ 1.3180 & 0.9481 & 0.1805 & 0.9481w_1 + 0.1805 \\ 1.1190 & 0.1805 & 0.9025 & 0.1805w_1 + 0.9025 \\ 1.3180w_1 + 1.1190 & 0.9481w_1 + 0.1805 & 0.1805w_1 + 0.9025 & 1.3090w_1 + 0.9025 \end{pmatrix}$$

which is a bordered symmetric positive semidefinite matrix.

The determinant of $\mathcal{M}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ is:

$$\det(\mathcal{M}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = 0.7491w_1 - 0.7491w_1^2.$$

Thus, the optimization problem corresponding to D–optimality criterion is formulated as:

$$\max_{w_1} \left(0.7491w_1 - 0.7491w_1^2\right).$$

Next, we compute the covariance matrix inverting the FIM:

$$\operatorname{cov}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathcal{M}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}).$$

The $(t_{\max}+1, t_{\max}+1)$ element of $\operatorname{cov}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ is given by:

$$[\operatorname{cov}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]_{t_{\max}+1, t_{\max}+1} = \frac{0.7902}{0.7491w_1 - 0.7491w_1^2}.$$

Consequently, the equivalent optimization problem is:

$$\min_{w_1} \frac{0.7902}{0.7491w_1 - 0.7491w_1^2} \quad \equiv \quad \max_{w_1} \left(0.7491w_1 - 0.7491w_1^2\right),$$

and they are equivalent as expected.

3 Results

The simulation results are presented in tabular format for clarity. Each table contains four columns: the first column lists $s_{\max}$, the second shows ρ, the third provides the optimal value (Opt), and the fourth represents the corresponding design in matrix form. Note that $t_{\max} = s_{\max} + 1$.

To streamline the presentation of the optimal designs, denoted as ξ_{Opt}, the displayed values represent the weights $(\mathbf{w})$ arranged sequentially from left to right. Specifically, the first value corresponds to $s = 1$, the second to $s = 2$, and so on, where $s \in [\![s_{\max}]\!]$.

Table 1 D–optimal designs for $r = 0.05$ and exponential decay correlation structure.

S	ρ	Opt	ξ_{Opt}
2	0.00	-1.5915e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.10	-1.5519e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.20	-1.4317e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.30	-1.2265e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.40	-9.2691e-01	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.50	-5.1533e-01	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.60	4.1555e-02	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.70	8.1076e-01	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.80	1.9485e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.90	3.9614e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.99	1.0818e+01	$(0.5000\ 0.5000)$
3	0.00	-1.0775e+00	$(0.5000\ 0.0001\ 0.5000)$
3	0.10	-1.1200e+00	$(0.4572\ 0.0881\ 0.4547)$
3	0.20	-1.0490e+00	$(0.4234\ 0.1582\ 0.4184)$
3	0.30	-8.5664e-01	$(0.3976\ 0.2123\ 0.3901)$
3	0.40	-5.2993e-01	$(0.3784\ 0.2530\ 0.3686)$
3	0.50	-4.5524e-02	$(0.3646\ 0.2827\ 0.3527)$
3	0.60	6.4034e-01	$(0.3551\ 0.3037\ 0.3413)$
3	0.70	1.6161e+00	$(0.3487\ 0.3179\ 0.3335)$
3	0.80	3.0890e+00	$(0.3447\ 0.3268\ 0.3285)$
3	0.90	5.7338e+00	$(0.3426\ 0.3316\ 0.3258)$
3	0.99	1.4844e+01	$(0.3418\ 0.3334\ 0.3248)$
4	0.00	-9.0232e-01	$(0.4999\ 0.0001\ 0.0001\ 0.4999)$
4	0.10	-9.7323e-01	$(0.4532\ 0.0493\ 0.0473\ 0.4502)$
4	0.20	-9.1806e-01	$(0.4094\ 0.0958\ 0.0922\ 0.4026)$
4	0.30	-7.2061e-01	$(0.3709\ 0.1372\ 0.1323\ 0.3596)$
4	0.40	-3.5838e-01	$(0.3388\ 0.1725\ 0.1663\ 0.3225)$
4	0.50	2.0222e-01	$(0.3137\ 0.2009\ 0.1933\ 0.2921)$
4	0.60	1.0182e+00	$(0.2953\ 0.2227\ 0.2136\ 0.2684)$
4	0.70	2.2009e+00	$(0.2827\ 0.2384\ 0.2278\ 0.2511)$
4	0.80	4.0092e+00	$(0.2748\ 0.2487\ 0.2369\ 0.2396)$
4	0.90	7.2858e+00	$(0.2705\ 0.2546\ 0.2420\ 0.2330)$
4	0.99	1.8650e+01	$(0.2690\ 0.2566\ 0.2439\ 0.2305)$
5	0.00	-8.9599e-01	$(0.4998\ 0.0002\ 0.0001\ 0.0002\ 0.4998)$
5	0.10	-9.7706e-01	$(0.4528\ 0.0457\ 0.0086\ 0.0432\ 0.4498)$
5	0.20	-9.1931e-01	$(0.4068\ 0.0840\ 0.0307\ 0.0790\ 0.3995)$
5	0.30	-7.0254e-01	$(0.3634\ 0.1164\ 0.0607\ 0.1088\ 0.3506)$
5	0.40	-2.9626e-01	$(0.3246\ 0.1436\ 0.0938\ 0.1331\ 0.3048)$
5	0.50	3.4445e-01	$(0.2921\ 0.1662\ 0.1255\ 0.1521\ 0.2641)$
5	0.60	1.2920e+00	$(0.2669\ 0.1843\ 0.1529\ 0.1660\ 0.2299)$
5	0.70	2.6820e+00	$(0.2492\ 0.1981\ 0.1742\ 0.1754\ 0.2032)$
5	0.80	4.8258e+00	$(0.2381\ 0.2077\ 0.1889\ 0.1811\ 0.1842)$
5	0.90	8.7345e+00	$(0.2321\ 0.2135\ 0.1975\ 0.1840\ 0.1729)$
5	0.99	2.2352e+01	$(0.2300\ 0.2157\ 0.2007\ 0.1849\ 0.1687)$
6	0.00	-1.0053e+00	$(0.4997\ 0.0002\ 0.0001\ 0.0001\ 0.0002\ 0.4997)$
6	0.10	-1.0886e+00	$(0.4528\ 0.0453\ 0.0049\ 0.0045\ 0.0428\ 0.4497)$
6	0.20	-1.0184e+00	$(0.4063\ 0.0818\ 0.0190\ 0.0176\ 0.0764\ 0.3989)$
6	0.30	-7.7251e-01	$(0.3614\ 0.1105\ 0.0405\ 0.0379\ 0.1018\ 0.3480)$
6	0.40	-3.1472e-01	$(0.3193\ 0.1329\ 0.0669\ 0.0628\ 0.1201\ 0.2979)$
6	0.50	4.1031e-01	$(0.2823\ 0.1506\ 0.0951\ 0.0892\ 0.1322\ 0.2507)$
6	0.60	1.4910e+00	$(0.2523\ 0.1646\ 0.1218\ 0.1136\ 0.1393\ 0.2083)$
6	0.70	3.0889e+00	$(0.2307\ 0.1758\ 0.1446\ 0.1337\ 0.1423\ 0.1729)$
6	0.80	5.5685e+00	$(0.2172\ 0.1845\ 0.1616\ 0.1478\ 0.1427\ 0.1462)$
6	0.90	1.0109e+01	$(0.2103\ 0.1902\ 0.1722\ 0.1561\ 0.1420\ 0.1293)$
6	0.99	2.5981e+01	$(0.2080\ 0.1925\ 0.1762\ 0.1591\ 0.1414\ 0.1228)$
7	0.00	-1.2064e+00	$(0.4998\ 0.0001\ 0.0001\ 0.0001\ 0.0001\ 0.0001\ 0.4997)$
7	0.10	-1.2881e+00	$(0.4528\ 0.0453\ 0.0046\ 0.0008\ 0.0041\ 0.0427\ 0.4497)$
7	0.20	-1.1998e+00	$(0.4062\ 0.0813\ 0.0168\ 0.0060\ 0.0150\ 0.0759\ 0.3988)$
7	0.30	-9.1823e-01	$(0.3607\ 0.1088\ 0.0347\ 0.0178\ 0.0311\ 0.0997\ 0.3471)$
7	0.40	-4.0297e-01	$(0.3173\ 0.1289\ 0.0568\ 0.0364\ 0.0505\ 0.1149\ 0.2952)$
7	0.50	4.1044e-01	$(0.2778\ 0.1433\ 0.0810\ 0.0601\ 0.0713\ 0.1225\ 0.2440)$
7	0.60	1.6262e+00	$(0.2446\ 0.1541\ 0.1053\ 0.0857\ 0.0909\ 0.1238\ 0.1958)$
7	0.70	3.4326e+00	$(0.2199\ 0.1629\ 0.1274\ 0.1094\ 0.1069\ 0.1205\ 0.1529)$
7	0.80	6.2484e+00	$(0.2048\ 0.1706\ 0.1454\ 0.1281\ 0.1179\ 0.1147\ 0.1184)$
7	0.90	1.1422e+01	$(0.1976\ 0.1766\ 0.1574\ 0.1400\ 0.1239\ 0.1091\ 0.0954)$
7	0.99	2.9548e+01	$(0.1956\ 0.1793\ 0.1623\ 0.1445\ 0.1259\ 0.1064\ 0.0860)$

References

Boyd, S., Vandenberghe, L.: Convex Optimization. University Press, Cambridge (2004)
Harville, D.A.: Matrix Algebra From a Statistician's Perspective. Springer, New York (1997)

Table 2 D–optimal designs for $r = 0.00$ and exponential decay correlation structure.

S	ρ	Opt	ξ_{Opt}
2	0.00	-1.3863e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.10	-1.3462e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.20	-1.2246e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.30	-1.0172e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.40	-7.1481e-01	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.50	-3.0010e-01	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.60	2.6005e-01	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.70	1.0325e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.80	2.1734e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.90	4.1892e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.99	1.1048e+01	$(0.5001\ 0.4999)$
3	0.00	-6.9315e-01	$(0.5000\ 0.0001\ 0.5000)$
3	0.10	-7.3741e-01	$(0.4550\ 0.0901\ 0.4549)$
3	0.20	-6.6653e-01	$(0.4194\ 0.1613\ 0.4193)$
3	0.30	-4.7285e-01	$(0.3921\ 0.2158\ 0.3921)$
3	0.40	-1.4358e-01	$(0.3718\ 0.2564\ 0.3718)$
3	0.50	3.4425e-01	$(0.3571\ 0.2857\ 0.3571)$
3	0.60	1.0340e+00	$(0.3469\ 0.3061\ 0.3469)$
3	0.70	2.0139e+00	$(0.3402\ 0.3196\ 0.3402)$
3	0.80	3.4909e+00	$(0.3360\ 0.3279\ 0.3361)$
3	0.90	6.1395e+00	$(0.3340\ 0.3320\ 0.3340)$
3	0.99	1.5253e+01	$(0.3333\ 0.3333\ 0.3333)$
4	0.00	-2.8768e-01	$(0.5000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.5000)$
4	0.10	-3.6156e-01	$(0.4505\ 0.0495\ 0.0495\ 0.4505)$
4	0.20	-3.0800e-01	$(0.4039\ 0.0962\ 0.0962\ 0.4038)$
4	0.30	-1.1044e-01	$(0.3624\ 0.1376\ 0.1376\ 0.3624)$
4	0.40	2.5366e-01	$(0.3276\ 0.1724\ 0.1724\ 0.3276)$
4	0.50	8.1758e-01	$(0.3000\ 0.2000\ 0.2000\ 0.3000)$
4	0.60	1.6379e+00	$(0.2794\ 0.2206\ 0.2206\ 0.2794)$
4	0.70	2.8253e+00	$(0.2651\ 0.2349\ 0.2349\ 0.2651)$
4	0.80	4.6384e+00	$(0.2561\ 0.2439\ 0.2439\ 0.2561)$
4	0.90	7.9198e+00	$(0.2514\ 0.2487\ 0.2485\ 0.2514)$
4	0.99	1.9288e+01	$(0.2500\ 0.2499\ 0.2500\ 0.2500)$
5	0.00	-1.0899e-09	$(0.5000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.5000)$
5	0.10	-8.4729e-02	$(0.4501\ 0.0454\ 0.0090\ 0.0454\ 0.4501)$
5	0.20	-2.9707e-02	$(0.4008\ 0.0832\ 0.0320\ 0.0832\ 0.4008)$
5	0.30	1.8591e-01	$(0.3537\ 0.1147\ 0.0632\ 0.1147\ 0.3537)$
5	0.40	5.9302e-01	$(0.3109\ 0.1406\ 0.0970\ 0.1406\ 0.3109)$
5	0.50	1.2365e+00	$(0.2742\ 0.1613\ 0.1290\ 0.1613\ 0.2742)$
5	0.60	2.1884e+00	$(0.2450\ 0.1770\ 0.1561\ 0.1770\ 0.2450)$
5	0.70	3.5835e+00	$(0.2236\ 0.1881\ 0.1767\ 0.1881\ 0.2236)$
5	0.80	5.7328e+00	$(0.2097\ 0.1951\ 0.1904\ 0.1951\ 0.2097)$
5	0.90	9.6470e+00	$(0.2022\ 0.1988\ 0.1979\ 0.1988\ 0.2023)$
5	0.99	2.3269e+01	$(0.2000\ 0.2000\ 0.2000\ 0.2000\ 0.2000)$
6	0.00	2.2314e-01	$(0.4998\ 0.0001\ 0.0001\ 0.0001\ 0.0001\ 0.4998)$
6	0.10	1.3567e-01	$(0.4500\ 0.0451\ 0.0049\ 0.0049\ 0.0451\ 0.4500)$
6	0.20	2.0234e-01	$(0.4002\ 0.0806\ 0.0192\ 0.0192\ 0.0806\ 0.4002)$
6	0.30	4.4595e-01	$(0.3511\ 0.1079\ 0.0410\ 0.0410\ 0.1079\ 0.3511)$
6	0.40	9.0339e-01	$(0.3043\ 0.1282\ 0.0675\ 0.0675\ 0.1282\ 0.3043)$
6	0.50	1.6304e+00	$(0.2619\ 0.1429\ 0.0952\ 0.0952\ 0.1429\ 0.2619)$
6	0.60	2.7150e+00	$(0.2261\ 0.1531\ 0.1208\ 0.1208\ 0.1531\ 0.2261)$
6	0.70	4.3181e+00	$(0.1986\ 0.1598\ 0.1416\ 0.1416\ 0.1598\ 0.1986)$
6	0.80	6.8035e+00	$(0.1799\ 0.1639\ 0.1561\ 0.1561\ 0.1640\ 0.1799)$
6	0.90	1.1350e+01	$(0.1697\ 0.1661\ 0.1642\ 0.1642\ 0.1661\ 0.1697)$
6	0.99	2.7227e+01	$(0.1667\ 0.1667\ 0.1666\ 0.1666\ 0.1667\ 0.1667)$
7	0.00	4.0546e-01	$(0.4997\ 0.0002\ 0.0001\ 0.0001\ 0.0001\ 0.0002\ 0.4996)$
7	0.10	3.1942e-01	$(0.4500\ 0.0450\ 0.0045\ 0.0010\ 0.0045\ 0.0450\ 0.4500)$
7	0.20	4.0353e-01	$(0.4000\ 0.0801\ 0.0166\ 0.0064\ 0.0166\ 0.0801\ 0.4000)$
7	0.30	6.8181e-01	$(0.3503\ 0.1059\ 0.0343\ 0.0189\ 0.0343\ 0.1059\ 0.3503)$
7	0.40	1.1955e+00	$(0.3017\ 0.1233\ 0.0558\ 0.0385\ 0.0558\ 0.1233\ 0.3017)$
7	0.50	2.0098e+00	$(0.2559\ 0.1339\ 0.0787\ 0.0630\ 0.0787\ 0.1339\ 0.2559)$
7	0.60	3.2289e+00	$(0.2154\ 0.1395\ 0.1007\ 0.0889\ 0.1007\ 0.1395\ 0.2153)$
7	0.70	5.0402e+00	$(0.1827\ 0.1419\ 0.1193\ 0.1121\ 0.1193\ 0.1419\ 0.1827)$
7	0.80	7.8616e+00	$(0.1597\ 0.1427\ 0.1328\ 0.1296\ 0.1328\ 0.1427\ 0.1597)$
7	0.90	1.3041e+01	$(0.1468\ 0.1428\ 0.1405\ 0.1397\ 0.1405\ 0.1429\ 0.1468)$
7	0.99	3.1172e+01	$(0.1429\ 0.1429\ 0.1428\ 0.1428\ 0.1428\ 0.1429\ 0.1429)$

Table 3 D–optimal designs for $r = 0.20$ and exponential decay correlation structure.

S	ρ	Opt	ξ_{Opt}
2	0.00	-2.2789e+00	(0.5000 0.5000)
2	0.10	-2.2407e+00	(0.5000 0.5000)
2	0.20	-2.1249e+00	(0.5000 0.5000)
2	0.30	-1.9264e+00	(0.5000 0.5000)
2	0.40	-1.6354e+00	(0.5000 0.5000)
2	0.50	-1.2335e+00	(0.5000 0.5000)
2	0.60	-6.8692e-01	(0.5000 0.5000)
2	0.70	7.1907e-02	(0.5000 0.5000)
2	0.80	1.1995e+00	(0.5000 0.5000)
2	0.90	3.2029e+00	(0.5000 0.5000)
2	0.99	1.0051e+01	(0.5000 0.5000)
3	0.00	-2.3605e+00	(0.4999 0.0001 0.4999)
3	0.10	-2.3968e+00	(0.4640 0.0820 0.4540)
3	0.20	-2.3243e+00	(0.4356 0.1488 0.4156)
3	0.30	-2.1351e+00	(0.4140 0.2019 0.3841)
3	0.40	-1.8153e+00	(0.3982 0.2430 0.3588)
3	0.50	-1.3406e+00	(0.3871 0.2742 0.3387)
3	0.60	-6.6616e-01	(0.3796 0.2973 0.3232)
3	0.70	2.9724e-01	(0.3746 0.3138 0.3116)
3	0.80	1.7576e+00	(0.3716 0.3250 0.3034)
3	0.90	4.3901e+00	(0.3698 0.3321 0.2981)
3	0.99	1.3490e+01	(0.3690 0.3358 0.2953)
4	0.00	-2.9489e+00	(0.4999 0.0001 0.0001 0.4999)
4	0.10	-3.0092e+00	(0.4611 0.0489 0.0405 0.4494)
4	0.20	-2.9471e+00	(0.4257 0.0949 0.0803 0.3991)
4	0.30	-2.7476e+00	(0.3952 0.1368 0.1169 0.3511)
4	0.40	-2.3883e+00	(0.3707 0.1736 0.1487 0.3069)
4	0.50	-1.8349e+00	(0.3526 0.2051 0.1747 0.2676)
4	0.60	-1.0294e+00	(0.3402 0.2311 0.1948 0.2338)
4	0.70	1.4102e-01	(0.3328 0.2516 0.2094 0.2061)
4	0.80	1.9360e+00	(0.3289 0.2669 0.2194 0.1847)
4	0.90	5.1991e+00	(0.3272 0.2772 0.2256 0.1699)
4	0.99	1.6551e+01	(0.3266 0.2828 0.2288 0.1618)
5	0.00	-3.8741e+00	(0.4999 0.0001 0.0001 0.0001 0.4999)
5	0.10	-3.9418e+00	(0.4609 0.0463 0.0075 0.0364 0.4490)
5	0.20	-3.8727e+00	(0.4241 0.0864 0.0271 0.0666 0.3959)
5	0.30	-3.6484e+00	(0.3909 0.1216 0.0545 0.0917 0.3413)
5	0.40	-3.2396e+00	(0.3626 0.1529 0.0860 0.1118 0.2867)
5	0.50	-2.6015e+00	(0.3406 0.1812 0.1178 0.1269 0.2335)
5	0.60	-1.6608e+00	(0.3257 0.2066 0.1473 0.1370 0.1834)
5	0.70	-2.8012e-01	(0.3177 0.2292 0.1725 0.1424 0.1382)
5	0.80	1.8528e+00	(0.3152 0.2482 0.1923 0.1442 0.1002)
5	0.90	5.7495e+00	(0.3158 0.2626 0.2063 0.1439 0.0715)
5	0.99	1.9355e+01	(0.3172 0.2709 0.2139 0.1430 0.0549)
6	0.00	-5.0830e+00	(0.4999 0.0000 0.0000 0.0000 0.0001 0.4999)
6	0.10	-5.1510e+00	(0.4609 0.0461 0.0048 0.0033 0.0360 0.4489)
6	0.20	-5.0659e+00	(0.4239 0.0850 0.0186 0.0135 0.0639 0.3952)
6	0.30	-4.8074e+00	(0.3898 0.1180 0.0397 0.0299 0.0841 0.3384)
6	0.40	-4.3411e+00	(0.3600 0.1465 0.0665 0.0511 0.0972 0.2787)
6	0.50	-3.6125e+00	(0.3362 0.1723 0.0967 0.0748 0.1034 0.2167)
6	0.60	-2.5326e+00	(0.3199 0.1968 0.1283 0.0982 0.1031 0.1538)
6	0.70	-9.3824e-01	(0.3121 0.2209 0.1589 0.1189 0.0969 0.0922)
6	0.80	1.5367e+00	(0.3121 0.2441 0.1864 0.1353 0.0866 0.0355)
6	0.90	6.0714e+00	(0.3158 0.2626 0.2062 0.1439 0.0715 0.0000)
6	0.99	2.1933e+01	(0.3171 0.2709 0.2138 0.1431 0.0551 0.0000)
7	0.00	-6.5520e+00	(0.4998 0.0001 0.0001 0.0001 0.0001 0.0002 0.4996)
7	0.10	-6.6165e+00	(0.4609 0.0461 0.0046 0.0007 0.0029 0.0359 0.4489)
7	0.20	-6.5105e+00	(0.4238 0.0848 0.0172 0.0050 0.0107 0.0634 0.3950)
7	0.30	-6.2119e+00	(0.3896 0.1171 0.0361 0.0152 0.0225 0.0819 0.3376)
7	0.40	-5.6821e+00	(0.3592 0.1445 0.0603 0.0320 0.0372 0.0913 0.2755)
7	0.50	-4.8581e+00	(0.3345 0.1689 0.0886 0.0547 0.0534 0.0917 0.2083)
7	0.60	-3.6356e+00	(0.3174 0.1927 0.1202 0.0817 0.0689 0.0829 0.1362)
7	0.70	-1.8244e+00	(0.3101 0.2179 0.1540 0.1103 0.0818 0.0655 0.0604)
7	0.80	9.9633e-01	(0.3122 0.2441 0.1864 0.1353 0.0866 0.0355 0.0000)
7	0.90	6.1701e+00	(0.3158 0.2626 0.2062 0.1439 0.0715 0.0000 0.0000)
7	0.99	2.4288e+01	(0.3171 0.2709 0.2138 0.1431 0.0551 0.0000 0.0000)

Table 4 A–optimal designs for $r = 0.05$ and exponential decay correlation structure.

S	ρ	Opt	ξ_{Opt}
	0.00	2.0155e-01	(0.4495 0.5505)
2	0.10	2.0969e-01	(0.4495 0.5505)
2	0.20	2.3646e-01	(0.4495 0.5505)
2	0.30	2.9033e-01	(0.4495 0.5505)
2	0.40	3.9174e-01	(0.4495 0.5505)
2	0.50	5.9121e-01	(0.4495 0.5505)
2	0.60	1.0318e+00	(0.4495 0.5505)
2	0.70	2.2267e+00	(0.4495 0.5505)
2	0.80	6.9464e+00	(0.4495 0.5505)
2	0.90	5.1996e+01	(0.4495 0.5505)
2	0.99	4.9387e+04	(0.4494 0.5506)
3	0.00	3.3042e-01	(0.4142 0.0000 0.5858)
3	0.10	3.1650e-01	(0.3787 0.0717 0.5497)
3	0.20	3.3947e-01	(0.3464 0.1346 0.5189)
3	0.30	4.1097e-01	(0.3195 0.1850 0.4955)
3	0.40	5.6904e-01	(0.2977 0.2237 0.4785)
3	0.50	9.2254e-01	(0.2807 0.2525 0.4668)
3	0.60	1.8297e+00	(0.2679 0.2730 0.4591)
3	0.70	4.8504e+00	(0.2588 0.2869 0.4543)
3	0.80	2.1145e+01	(0.2528 0.2957 0.4514)
3	0.90	2.9762e+02	(0.2495 0.3006 0.4500)
3	0.99	2.6916e+06	(0.2482 0.3023 0.4495)
4	0.00	3.8506e-01	(0.3874 0.0000 0.0000 0.6126)
4	0.10	3.5835e-01	(0.3559 0.0276 0.0408 0.5757)
4	0.20	3.7798e-01	(0.3187 0.0600 0.0852 0.5361)
4	0.30	4.5927e-01	(0.2822 0.0905 0.1263 0.5010)
4	0.40	6.5762e-01	(0.2485 0.1167 0.1624 0.4724)
4	0.50	1.1479e+00	(0.2189 0.1378 0.1924 0.4510)
4	0.60	2.5870e+00	(0.1944 0.1534 0.2159 0.4363)
4	0.70	8.4168e+00	(0.1757 0.1641 0.2332 0.4271)
4	0.80	5.1226e+01	(0.1627 0.1708 0.2447 0.4219)
4	0.90	1.3549e+03	(0.1551 0.1744 0.2513 0.4193)
4	0.99	1.1657e+08	(0.1516 0.1756 0.2535 0.4193)
5	0.00	3.7890e-01	(0.3660 0.0000 0.0000 0.0000 0.6340)
5	0.10	3.4894e-01	(0.3408 0.0218 0.0000 0.0375 0.6000)
5	0.20	3.6879e-01	(0.3054 0.0455 0.0142 0.0772 0.5577)
5	0.30	4.5635e-01	(0.2681 0.0657 0.0355 0.1131 0.5175)
5	0.40	6.8165e-01	(0.2307 0.0819 0.0606 0.1448 0.4819)
5	0.50	1.2859e+00	(0.1950 0.0938 0.0857 0.1721 0.4533)
5	0.60	3.2953e+00	(0.1633 0.1015 0.1080 0.1947 0.4326)
5	0.70	1.3151e+01	(0.1372 0.1058 0.1254 0.2123 0.4193)
5	0.80	1.1167e+02	(0.1181 0.1076 0.1375 0.2248 0.4119)
5	0.90	5.5479e+03	(0.1065 0.1082 0.1445 0.2323 0.4085)
5	0.99	4.5458e+09	(0.1018 0.1084 0.1472 0.2354 0.4071)
6	0.00	3.3227e-01	(0.3483 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.6517)
6	0.10	3.0524e-01	(0.3287 0.0167 0.0000 0.0000 0.0335 0.6211)
6	0.20	3.2651e-01	(0.2960 0.0411 0.0030 0.0066 0.0753 0.5779)
6	0.30	4.1568e-01	(0.2604 0.0582 0.0141 0.0222 0.1100 0.5351)
6	0.40	6.5284e-01	(0.2230 0.0701 0.0289 0.0427 0.1400 0.4953)
6	0.50	1.3369e+00	(0.1854 0.0769 0.0453 0.0657 0.1653 0.4613)
6	0.60	3.9018e+00	(0.1499 0.0791 0.0608 0.0883 0.1864 0.4355)
6	0.70	1.9101e+01	(0.1191 0.0779 0.0733 0.1077 0.2035 0.4184)
6	0.80	2.2618e+02	(0.0955 0.0752 0.0820 0.1223 0.2162 0.4088)
6	0.90	2.1101e+04	(0.0806 0.0727 0.0870 0.1312 0.2241 0.4044)
6	0.99	1.6450e+11	(0.0752 0.0716 0.0888 0.1338 0.2270 0.4036)
7	0.00	2.6601e-01	(0.3333 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.6667)
7	0.10	2.4475e-01	(0.3188 0.0120 0.0000 0.0000 0.0000 0.0293 0.6399)
7	0.20	2.6651e-01	(0.2883 0.0381 0.0000 0.0000 0.0032 0.0740 0.5964)
7	0.30	3.5142e-01	(0.2547 0.0549 0.0089 0.0021 0.0185 0.1091 0.5519)
7	0.40	5.8399e-01	(0.2186 0.0655 0.0191 0.0121 0.0367 0.1388 0.5092)
7	0.50	1.3040e+00	(0.1811 0.0702 0.0302 0.0262 0.0577 0.1634 0.4713)
7	0.60	4.3436e+00	(0.1443 0.0695 0.0404 0.0421 0.0793 0.1834 0.4411)
7	0.70	2.6093e+01	(0.1109 0.0648 0.0483 0.0571 0.0990 0.1996 0.4203)
7	0.80	4.3079e+02	(0.0841 0.0586 0.0532 0.0689 0.1146 0.2121 0.4084)
7	0.90	7.5453e+04	(0.0667 0.0535 0.0557 0.0763 0.1245 0.2202 0.4031)
7	0.99	5.6024e+12	(0.0598 0.0524 0.0575 0.0788 0.1271 0.2228 0.4017)

Table 5 A–optimal designs for $r = 0.00$ and exponential decay correlation structure.

S	ρ	Opt	ξ_{Opt}
2	0.00	2.4745e-01	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.10	2.5758e-01	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.20	2.9088e-01	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.30	3.5792e-01	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.40	4.8429e-01	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.50	7.3318e-01	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.60	1.2838e+00	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.70	2.7795e+00	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.80	8.6980e+00	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.90	6.5298e+01	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.99	6.2174e+04	$(0.4495\ 0.5505)$
3	0.00	4.8528e-01	$(0.4142\ 0.0001\ 0.5857)$
3	0.10	4.6411e-01	$(0.3751\ 0.0769\ 0.5480)$
3	0.20	4.9778e-01	$(0.3414\ 0.1408\ 0.5178)$
3	0.30	6.0352e-01	$(0.3132\ 0.1916\ 0.4953)$
3	0.40	8.3792e-01	$(0.2904\ 0.2303\ 0.4794)$
3	0.50	1.3633e+00	$(0.2726\ 0.2587\ 0.4688)$
3	0.60	2.7149e+00	$(0.2593\ 0.2786\ 0.4620)$
3	0.70	7.2274e+00	$(0.2500\ 0.2920\ 0.4580)$
3	0.80	3.1637e+01	$(0.2441\ 0.3001\ 0.4558)$
3	0.90	4.4707e+02	$(0.2410\ 0.3043\ 0.4547)$
3	0.99	4.0559e+06	$(0.2398\ 0.3056\ 0.4546)$
4	0.00	7.1198e-01	$(0.3874\ 0.0000\ 0.0000\ 0.6125)$
4	0.10	6.6095e-01	$(0.3499\ 0.0314\ 0.0475\ 0.5711)$
4	0.20	6.9633e-01	$(0.3106\ 0.0636\ 0.0937\ 0.5321)$
4	0.30	8.4658e-01	$(0.2718\ 0.0938\ 0.1361\ 0.4983)$
4	0.40	1.2151e+00	$(0.2358\ 0.1197\ 0.1730\ 0.4715)$
4	0.50	2.1294e+00	$(0.2041\ 0.1400\ 0.2035\ 0.4523)$
4	0.60	4.8229e+00	$(0.1781\ 0.1548\ 0.2272\ 0.4400)$
4	0.70	1.5777e+01	$(0.1583\ 0.1646\ 0.2443\ 0.4328)$
4	0.80	9.6551e+01	$(0.1450\ 0.1705\ 0.2554\ 0.4292)$
4	0.90	2.5671e+03	$(0.1377\ 0.1734\ 0.2613\ 0.4276)$
4	0.99	2.2179e+08	$(0.1348\ 0.1739\ 0.2634\ 0.4279)$
5	0.00	9.2820e-01	$(0.3660\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0001\ 0.6339)$
5	0.10	8.5236e-01	$(0.3323\ 0.0254\ 0.0053\ 0.0450\ 0.5919)$
5	0.20	8.9912e-01	$(0.2950\ 0.0479\ 0.0204\ 0.0866\ 0.5501)$
5	0.30	1.1123e+00	$(0.2552\ 0.0668\ 0.0428\ 0.1241\ 0.5111)$
5	0.40	1.6647e+00	$(0.2147\ 0.0815\ 0.0687\ 0.1572\ 0.4778)$
5	0.50	3.1536e+00	$(0.1759\ 0.0918\ 0.0943\ 0.1857\ 0.4523)$
5	0.60	8.1312e+00	$(0.1413\ 0.0978\ 0.1165\ 0.2093\ 0.4351)$
5	0.70	3.2685e+01	$(0.1131\ 0.1004\ 0.1335\ 0.2276\ 0.4254)$
5	0.80	2.7962e+02	$(0.0931\ 0.1011\ 0.1449\ 0.2402\ 0.4207)$
5	0.90	1.3990e+04	$(0.0816\ 0.1010\ 0.1511\ 0.2474\ 0.4189)$
5	0.99	1.1530e+10	$(0.0786\ 0.1011\ 0.1523\ 0.2501\ 0.4179)$
6	0.00	1.1350e+00	$(0.3483\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.6516)$
6	0.10	1.0394e+00	$(0.3178\ 0.0231\ 0.0019\ 0.0033\ 0.0444\ 0.6094)$
6	0.20	1.1093e+00	$(0.2834\ 0.0429\ 0.0083\ 0.0138\ 0.0853\ 0.5663)$
6	0.30	1.4109e+00	$(0.2453\ 0.0580\ 0.0195\ 0.0309\ 0.1217\ 0.5246)$
6	0.40	2.2191e+00	$(0.2047\ 0.0677\ 0.0342\ 0.0531\ 0.1531\ 0.4872)$
6	0.50	4.5642e+00	$(0.1634\ 0.0719\ 0.0503\ 0.0775\ 0.1799\ 0.4569)$
6	0.60	1.3420e+01	$(0.1242\ 0.0714\ 0.0651\ 0.1010\ 0.2026\ 0.4357)$
6	0.70	6.6325e+01	$(0.0903\ 0.0678\ 0.0766\ 0.1209\ 0.2210\ 0.4234)$
6	0.80	7.9355e+02	$(0.0650\ 0.0633\ 0.0842\ 0.1352\ 0.2346\ 0.4178)$
6	0.90	7.4737e+04	$(0.0501\ 0.0599\ 0.0881\ 0.1433\ 0.2426\ 0.4160)$
6	0.99	5.8652e+11	$(0.0449\ 0.0608\ 0.0880\ 0.1440\ 0.2463\ 0.4160)$
7	0.00	1.3333e+00	$(0.3333\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.6666)$
7	0.10	1.2228e+00	$(0.3054\ 0.0214\ 0.0015\ 0.0004\ 0.0030\ 0.0438\ 0.6245)$
7	0.20	1.3280e+00	$(0.2735\ 0.0400\ 0.0061\ 0.0027\ 0.0125\ 0.0848\ 0.5805)$
7	0.30	1.7489e+00	$(0.2377\ 0.0539\ 0.0135\ 0.0089\ 0.0279\ 0.1212\ 0.5370)$
7	0.40	2.9091e+00	$(0.1985\ 0.0618\ 0.0228\ 0.0198\ 0.0481\ 0.1522\ 0.4968)$
7	0.50	6.5247e+00	$(0.1571\ 0.0634\ 0.0327\ 0.0346\ 0.0711\ 0.1783\ 0.4629)$
7	0.60	2.1920e+01	$(0.1159\ 0.0591\ 0.0414\ 0.0510\ 0.0944\ 0.2001\ 0.4381)$
7	0.70	1.3331e+02	$(0.0787\ 0.0511\ 0.0474\ 0.0659\ 0.1152\ 0.2183\ 0.4234)$
7	0.80	2.2321e+03	$(0.0497\ 0.0425\ 0.0507\ 0.0770\ 0.1311\ 0.2322\ 0.4169)$
7	0.90	3.9602e+05	$(0.0321\ 0.0364\ 0.0519\ 0.0834\ 0.1405\ 0.2408\ 0.4150)$
7	0.99	2.9698e+13	$(0.0284\ 0.0376\ 0.0530\ 0.0833\ 0.1401\ 0.2436\ 0.4140)$

Table 6 A–optimal designs for $r = 0.20$ and exponential decay correlation structure.

S	ρ	Opt	ξ_{Opt}
2	0.00	1.0136e-01	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.10	1.0529e-01	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.20	1.1823e-01	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.30	1.4418e-01	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.40	1.9289e-01	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.50	2.8830e-01	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.60	4.9799e-01	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.70	1.0636e+00	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.80	3.2847e+00	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.90	2.4352e+01	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.99	2.2946e+04	$(0.4495\ 0.5505)$
3	0.00	9.1594e-02	$(0.4142\ 0.0000\ 0.5858)$
3	0.10	8.8220e-02	$(0.3894\ 0.0545\ 0.5561)$
3	0.20	9.4712e-02	$(0.3618\ 0.1145\ 0.5237)$
3	0.30	1.1425e-01	$(0.3387\ 0.1636\ 0.4977)$
3	0.40	1.5704e-01	$(0.3200\ 0.2026\ 0.4774)$
3	0.50	2.5204e-01	$(0.3053\ 0.2325\ 0.4622)$
3	0.60	4.9395e-01	$(0.2941\ 0.2548\ 0.4512)$
3	0.70	1.2928e+00	$(0.2858\ 0.2708\ 0.4434)$
3	0.80	5.5629e+00	$(0.2800\ 0.2817\ 0.4383)$
3	0.90	7.7318e+01	$(0.2763\ 0.2887\ 0.4351)$
3	0.99	6.9180e+05	$(0.2744\ 0.2922\ 0.4334)$
4	0.00	4.9743e-02	$(0.3874\ 0.0000\ 0.0000\ 0.6126)$
4	0.10	4.6693e-02	$(0.3735\ 0.0150\ 0.0175\ 0.5940)$
4	0.20	4.9521e-02	$(0.3424\ 0.0482\ 0.0563\ 0.5531)$
4	0.30	6.0208e-02	$(0.3126\ 0.0793\ 0.0934\ 0.5147)$
4	0.40	8.5819e-02	$(0.2854\ 0.1069\ 0.1269\ 0.4808)$
4	0.50	1.4844e-01	$(0.2618\ 0.1300\ 0.1555\ 0.4526)$
4	0.60	3.3036e-01	$(0.2423\ 0.1484\ 0.1788\ 0.4305)$
4	0.70	1.0591e+00	$(0.2270\ 0.1621\ 0.1967\ 0.4142)$
4	0.80	6.3462e+00	$(0.2158\ 0.1718\ 0.2095\ 0.4029)$
4	0.90	1.6526e+02	$(0.2083\ 0.1780\ 0.2180\ 0.3957)$
4	0.99	1.4031e+07	$(0.2043\ 0.1810\ 0.2221\ 0.3925)$
5	0.00	1.9281e-02	$(0.3660\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.6340)$
5	0.10	1.7941e-02	$(0.3642\ 0.0023\ 0.0000\ 0.0013\ 0.6322)$
5	0.20	1.9128e-02	$(0.3347\ 0.0346\ 0.0000\ 0.0406\ 0.5901)$
5	0.30	2.3774e-02	$(0.3051\ 0.0613\ 0.0110\ 0.0747\ 0.5479)$
5	0.40	3.5479e-02	$(0.2761\ 0.0815\ 0.0332\ 0.1023\ 0.5068)$
5	0.50	6.6474e-02	$(0.2492\ 0.0981\ 0.0567\ 0.1263\ 0.4698)$
5	0.60	1.6832e-01	$(0.2256\ 0.1110\ 0.0787\ 0.1462\ 0.4385)$
5	0.70	6.6125e-01	$(0.2062\ 0.1204\ 0.0975\ 0.1620\ 0.4139)$
5	0.80	5.5150e+00	$(0.1914\ 0.1269\ 0.1119\ 0.1736\ 0.3962)$
5	0.90	2.6894e+02	$(0.1811\ 0.1310\ 0.1217\ 0.1815\ 0.3846)$
5	0.99	2.1681e+08	$(0.1759\ 0.1331\ 0.1270\ 0.1858\ 0.3783)$
6	0.00	5.6305e-03	$(0.3483\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.6517)$
6	0.10	5.2404e-03	$(0.3483\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.6517)$
6	0.20	5.6613e-03	$(0.3292\ 0.0222\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0221\ 0.6265)$
6	0.30	7.2646e-03	$(0.3013\ 0.0530\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0621\ 0.5836)$
6	0.40	1.1436e-02	$(0.2737\ 0.0752\ 0.0097\ 0.0068\ 0.0939\ 0.5407)$
6	0.50	2.3337e-02	$(0.2464\ 0.0890\ 0.0263\ 0.0247\ 0.1153\ 0.4983)$
6	0.60	6.7421e-02	$(0.2216\ 0.0990\ 0.0433\ 0.0436\ 0.1324\ 0.4602)$
6	0.70	3.2488e-01	$(0.2003\ 0.1057\ 0.0586\ 0.0612\ 0.1456\ 0.4286)$
6	0.80	3.7724e+00	$(0.1835\ 0.1098\ 0.0710\ 0.0758\ 0.1552\ 0.4046)$
6	0.90	3.4448e+02	$(0.1717\ 0.1122\ 0.0798\ 0.0863\ 0.1616\ 0.3884)$
6	0.99	2.6332e+09	$(0.1651\ 0.1131\ 0.0846\ 0.0922\ 0.1648\ 0.3802)$
7	0.00	1.2686e-03	$(0.3333\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.6667)$
7	0.10	1.1854e-03	$(0.3333\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.6667)$
7	0.20	1.3046e-03	$(0.3253\ 0.0107\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0018\ 0.6623)$
7	0.30	1.7407e-03	$(0.2976\ 0.0419\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0422\ 0.6183)$
7	0.40	2.9101e-03	$(0.2722\ 0.0703\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0823\ 0.5752)$
7	0.50	6.4954e-03	$(0.2464\ 0.0866\ 0.0162\ 0.0000\ 0.0083\ 0.1105\ 0.5321)$
7	0.60	2.1475e-02	$(0.2219\ 0.0962\ 0.0316\ 0.0078\ 0.0255\ 0.1272\ 0.4898)$
7	0.70	1.2713e-01	$(0.2003\ 0.1018\ 0.0444\ 0.0218\ 0.0404\ 0.1387\ 0.4526)$
7	0.80	2.0564e+00	$(0.1828\ 0.1049\ 0.0550\ 0.0344\ 0.0533\ 0.1465\ 0.4231)$
7	0.90	3.5172e+02	$(0.1703\ 0.1063\ 0.0626\ 0.0441\ 0.0629\ 0.1514\ 0.4024)$
7	0.99	2.5517e+10	$(0.1634\ 0.1067\ 0.0666\ 0.0498\ 0.0682\ 0.1538\ 0.3915)$

Table 7 D–optimal designs for $r = 0.05$, and Matérn correlation structure (Parameters: $a = 0.5$, $b = 0.01$, $c = 4$, $\nu = a\,(\rho + b)$, $\phi = c\,(\rho + b)$).

S	ρ	Opt	ξ_{Opt}
2	0.00	-1.5915e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.10	-1.5844e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.20	-1.5354e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.30	-1.4215e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.40	-1.2399e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.50	-9.9641e-01	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.60	-6.9926e-01	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.70	-3.5666e-01	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.80	2.4052e-02	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.90	4.3664e-01	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.99	8.3086e-01	$(0.5000\ 0.5000)$
3	0.00	-1.0777e+00	$(0.4999\ 0.0002\ 0.4999)$
3	0.10	-1.1079e+00	$(0.4812\ 0.0386\ 0.4802)$
3	0.20	-1.1079e+00	$(0.4527\ 0.0974\ 0.4499)$
3	0.30	-1.0217e+00	$(0.4272\ 0.1503\ 0.4225)$
3	0.40	-8.4024e-01	$(0.4069\ 0.1927\ 0.4004)$
3	0.50	-5.7121e-01	$(0.3911\ 0.2260\ 0.3829)$
3	0.60	-2.2662e-01	$(0.3787\ 0.2523\ 0.3690)$
3	0.70	1.8187e-01	$(0.3688\ 0.2736\ 0.3576)$
3	0.80	6.4417e-01	$(0.3607\ 0.2913\ 0.3480)$
3	0.90	1.1519e+00	$(0.3539\ 0.3063\ 0.3398)$
3	0.99	1.6419e+00	$(0.3486\ 0.3181\ 0.3333)$
4	0.00	-9.0257e-01	$(0.4999\ 0.0001\ 0.0001\ 0.4999)$
4	0.10	-9.5083e-01	$(0.4766\ 0.0244\ 0.0239\ 0.4751)$
4	0.20	-9.7639e-01	$(0.4371\ 0.0659\ 0.0647\ 0.4324)$
4	0.30	-8.9984e-01	$(0.3999\ 0.1051\ 0.1033\ 0.3917)$
4	0.40	-7.0507e-01	$(0.3695\ 0.1377\ 0.1350\ 0.3577)$
4	0.50	-4.0019e-01	$(0.3456\ 0.1639\ 0.1602\ 0.3303)$
4	0.60	3.1908e-04	$(0.3269\ 0.1849\ 0.1801\ 0.3081)$
4	0.70	4.8208e-01	$(0.3120\ 0.2021\ 0.1960\ 0.2899)$
4	0.80	1.0326e+00	$(0.3000\ 0.2165\ 0.2090\ 0.2746)$
4	0.90	1.6415e+00	$(0.2901\ 0.2288\ 0.2197\ 0.2614)$
4	0.99	2.2324e+00	$(0.2825\ 0.2387\ 0.2281\ 0.2508)$
5	0.00	-8.9627e-01	$(0.4995\ 0.0004\ 0.0003\ 0.0004\ 0.4995)$
5	0.10	-9.5416e-01	$(0.4753\ 0.0211\ 0.0098\ 0.0202\ 0.4736)$
5	0.20	-9.9217e-01	$(0.4312\ 0.0557\ 0.0340\ 0.0536\ 0.4255)$
5	0.30	-9.1408e-01	$(0.3883\ 0.0883\ 0.0609\ 0.0848\ 0.3778)$
5	0.40	-6.9768e-01	$(0.3524\ 0.1152\ 0.0855\ 0.1100\ 0.3368)$
5	0.50	-3.5074e-01	$(0.3238\ 0.1368\ 0.1068\ 0.1295\ 0.3031)$
5	0.60	1.1054e-01	$(0.3013\ 0.1540\ 0.1250\ 0.1443\ 0.2755)$
5	0.70	6.6957e-01	$(0.2834\ 0.1680\ 0.1404\ 0.1555\ 0.2526)$
5	0.80	1.3118e+00	$(0.2692\ 0.1798\ 0.1537\ 0.1641\ 0.2331)$
5	0.90	2.0249e+00	$(0.2576\ 0.1900\ 0.1653\ 0.1708\ 0.2163)$
5	0.99	2.7191e+00	$(0.2489\ 0.1983\ 0.1746\ 0.1756\ 0.2027)$
6	0.00	-1.0056e+00	$(0.4995\ 0.0003\ 0.0002\ 0.0002\ 0.0003\ 0.4994)$
6	0.10	-1.0689e+00	$(0.4750\ 0.0201\ 0.0065\ 0.0062\ 0.0192\ 0.4731)$
6	0.20	-1.1114e+00	$(0.4290\ 0.0519\ 0.0240\ 0.0231\ 0.0493\ 0.4227)$
6	0.30	-1.0243e+00	$(0.3831\ 0.0811\ 0.0448\ 0.0433\ 0.0765\ 0.3711)$
6	0.40	-7.8035e-01	$(0.3440\ 0.1048\ 0.0649\ 0.0625\ 0.0977\ 0.3260)$
6	0.50	-3.8693e-01	$(0.3125\ 0.1234\ 0.0829\ 0.0796\ 0.1133\ 0.2882)$
6	0.60	1.3846e-01	$(0.2876\ 0.1381\ 0.0987\ 0.0943\ 0.1244\ 0.2568)$
6	0.70	7.7740e-01	$(0.2679\ 0.1500\ 0.1126\ 0.1069\ 0.1322\ 0.2305)$
6	0.80	1.5134e+00	$(0.2523\ 0.1600\ 0.1249\ 0.1176\ 0.1373\ 0.2080)$
6	0.90	2.3327e+00	$(0.2397\ 0.1688\ 0.1359\ 0.1268\ 0.1406\ 0.1883)$
6	0.99	3.1317e+00	$(0.2303\ 0.1761\ 0.1451\ 0.1340\ 0.1423\ 0.1722)$
7	0.00	-1.2068e+00	$(0.4995\ 0.0003\ 0.0002\ 0.0002\ 0.0002\ 0.0003\ 0.4994)$
7	0.10	-1.2732e+00	$(0.4748\ 0.0199\ 0.0055\ 0.0028\ 0.0051\ 0.0189\ 0.4730)$
7	0.20	-1.3152e+00	$(0.4280\ 0.0505\ 0.0203\ 0.0132\ 0.0189\ 0.0476\ 0.4215)$
7	0.30	-1.2138e+00	$(0.3806\ 0.0779\ 0.0380\ 0.0275\ 0.0354\ 0.0726\ 0.3679)$
7	0.40	-9.3793e-01	$(0.3398\ 0.0997\ 0.0552\ 0.0425\ 0.0512\ 0.0914\ 0.3202)$
7	0.50	-4.9463e-01	$(0.3066\ 0.1165\ 0.0708\ 0.0568\ 0.0652\ 0.1044\ 0.2798)$
7	0.60	9.7438e-02	$(0.2801\ 0.1294\ 0.0848\ 0.0699\ 0.0771\ 0.1129\ 0.2458)$
7	0.70	8.1824e-01	$(0.2591\ 0.1398\ 0.0973\ 0.0817\ 0.0871\ 0.1180\ 0.2169)$
7	0.80	1.6497e+00	$(0.2425\ 0.1486\ 0.1086\ 0.0923\ 0.0953\ 0.1206\ 0.1921)$
7	0.90	2.5763e+00	$(0.2292\ 0.1564\ 0.1190\ 0.1019\ 0.1021\ 0.1211\ 0.1701)$
7	0.99	3.4811e+00	$(0.2195\ 0.1631\ 0.1279\ 0.1099\ 0.1072\ 0.1204\ 0.1521)$

Table 8 D–optimal designs for $r = 0.05$, and Matérn correlation structure (Parameters: $a = 1.5$, $b = 0.01$, $c = 4$, $\nu = a\,(\rho + b)$, $\phi = c\,(\rho + b)$).

S	ρ	Opt	ξ_{Opt}
2	0.00	-1.5915e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.10	-1.5821e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.20	-1.4781e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.30	-1.1944e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.40	-7.2448e-01	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.50	-1.0031e-01	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.60	6.3964e-01	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.70	1.4616e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.80	2.3383e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.90	3.2483e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.99	4.0817e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
3	0.00	-1.0776e+00	$(0.5000\ 0.0001\ 0.4999)$
3	0.10	-1.1116e+00	$(0.4782\ 0.0448\ 0.4770)$
3	0.20	-1.0807e+00	$(0.4342\ 0.1357\ 0.4301)$
3	0.30	-8.2155e-01	$(0.3955\ 0.2168\ 0.3877)$
3	0.40	-3.0619e-01	$(0.3672\ 0.2770\ 0.3557)$
3	0.50	4.3006e-01	$(0.3473\ 0.3208\ 0.3319)$
3	0.60	1.3406e+00	$(0.3330\ 0.3534\ 0.3136)$
3	0.70	2.3841e+00	$(0.3223\ 0.3787\ 0.2989)$
3	0.80	3.5274e+00	$(0.3141\ 0.3990\ 0.2868)$
3	0.90	4.7443e+00	$(0.3077\ 0.4157\ 0.2766)$
3	0.99	5.8852e+00	$(0.3031\ 0.4283\ 0.2687)$
4	0.00	-9.0237e-01	$(0.4999\ 0.0001\ 0.0001\ 0.4999)$
4	0.10	-9.5354e-01	$(0.4755\ 0.0257\ 0.0247\ 0.4740)$
4	0.20	-9.5066e-01	$(0.4201\ 0.0842\ 0.0815\ 0.4142)$
4	0.30	-6.8339e-01	$(0.3661\ 0.1423\ 0.1374\ 0.3542)$
4	0.40	-1.0239e-01	$(0.3239\ 0.1896\ 0.1818\ 0.3047)$
4	0.50	7.5830e-01	$(0.2926\ 0.2271\ 0.2153\ 0.2650)$
4	0.60	1.8462e+00	$(0.2689\ 0.2581\ 0.2414\ 0.2316)$
4	0.70	3.1132e+00	$(0.2499\ 0.2856\ 0.2630\ 0.2015)$
4	0.80	4.5204e+00	$(0.2332\ 0.3121\ 0.2826\ 0.1721)$
4	0.90	6.0374e+00	$(0.2172\ 0.3392\ 0.3024\ 0.1412)$
4	0.99	7.4772e+00	$(0.2024\ 0.3654\ 0.3213\ 0.1109)$
5	0.00	-8.9604e-01	$(0.4999\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.4999)$
5	0.10	-9.5508e-01	$(0.4752\ 0.0234\ 0.0056\ 0.0222\ 0.4737)$
5	0.20	-9.5822e-01	$(0.4168\ 0.0729\ 0.0309\ 0.0690\ 0.4104)$
5	0.30	-6.6235e-01	$(0.3573\ 0.1200\ 0.0671\ 0.1122\ 0.3434)$
5	0.40	-2.1635e-03	$(0.3085\ 0.1575\ 0.1044\ 0.1443\ 0.2853)$
5	0.50	9.9073e-01	$(0.2710\ 0.1873\ 0.1393\ 0.1663\ 0.2362)$
5	0.60	2.2600e+00	$(0.2419\ 0.2127\ 0.1720\ 0.1808\ 0.1926)$
5	0.70	3.7516e+00	$(0.2178\ 0.2363\ 0.2051\ 0.1901\ 0.1506)$
5	0.80	5.4214e+00	$(0.1959\ 0.2606\ 0.2416\ 0.1961\ 0.1058)$
5	0.90	7.2348e+00	$(0.1733\ 0.2873\ 0.2853\ 0.2000\ 0.0541)$
5	0.99	8.9684e+00	$(0.1494\ 0.3142\ 0.3334\ 0.2030\ 0.0000)$
6	0.00	-1.0053e+00	$(0.4996\ 0.0003\ 0.0002\ 0.0002\ 0.0003\ 0.4995)$
6	0.10	-1.0682e+00	$(0.4752\ 0.0231\ 0.0033\ 0.0031\ 0.0218\ 0.4736)$
6	0.20	-1.0658e+00	$(0.4161\ 0.0703\ 0.0197\ 0.0185\ 0.0660\ 0.4094)$
6	0.30	-7.2821e-01	$(0.3545\ 0.1131\ 0.0456\ 0.0428\ 0.1040\ 0.3399)$
6	0.40	2.1195e-02	$(0.3029\ 0.1456\ 0.0747\ 0.0697\ 0.1295\ 0.2777)$
6	0.50	1.1524e+00	$(0.2621\ 0.1704\ 0.1043\ 0.0957\ 0.1439\ 0.2235)$
6	0.60	2.6060e+00	$(0.2299\ 0.1915\ 0.1347\ 0.1207\ 0.1497\ 0.1736)$
6	0.70	4.3234e+00	$(0.2029\ 0.2116\ 0.1679\ 0.1459\ 0.1482\ 0.1234)$
6	0.80	6.2552e+00	$(0.1779\ 0.2330\ 0.2077\ 0.1743\ 0.1399\ 0.0672)$
6	0.90	8.3631e+00	$(0.1511\ 0.2569\ 0.2584\ 0.2093\ 0.1243\ 0.0000)$
6	0.99	1.0382e+01	$(0.1056\ 0.2573\ 0.2906\ 0.2289\ 0.1176\ 0.0000)$
7	0.00	-1.2065e+00	$(0.4999\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0001\ 0.4999)$
7	0.10	-1.2712e+00	$(0.4751\ 0.0230\ 0.0029\ 0.0008\ 0.0026\ 0.0218\ 0.4736)$
7	0.20	-1.2566e+00	$(0.4159\ 0.0697\ 0.0171\ 0.0074\ 0.0155\ 0.0652\ 0.4092)$
7	0.30	-8.6883e-01	$(0.3537\ 0.1110\ 0.0389\ 0.0215\ 0.0349\ 0.1013\ 0.3387)$
7	0.40	-2.2702e-02	$(0.3008\ 0.1411\ 0.0635\ 0.0405\ 0.0557\ 0.1236\ 0.2748)$
7	0.50	1.2518e+00	$(0.2585\ 0.1633\ 0.0890\ 0.0623\ 0.0754\ 0.1338\ 0.2178)$
7	0.60	2.8925e+00	$(0.2245\ 0.1816\ 0.1162\ 0.0862\ 0.0932\ 0.1339\ 0.1644)$
7	0.70	4.8367e+00	$(0.1958\ 0.1992\ 0.1475\ 0.1137\ 0.1099\ 0.1249\ 0.1089)$
7	0.80	7.0305e+00	$(0.1690\ 0.2184\ 0.1869\ 0.1485\ 0.1270\ 0.1055\ 0.0447)$
7	0.90	9.4307e+00	$(0.1364\ 0.2345\ 0.2309\ 0.1853\ 0.1363\ 0.0766\ 0.0000)$
7	0.99	1.1732e+01	$(0.0906\ 0.2358\ 0.2672\ 0.2146\ 0.1366\ 0.0553\ 0.0000)$

Table 9 D–optimal constrained designs for $r = 0.05$, $\mathrm{Eff_A} \geqslant 0.97$.

S	ρ	Opt	ξ_{Opt}
2	0.00	-1.5915e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.10	-1.5519e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.20	-1.4317e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.30	-1.2265e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.40	-9.2691e-01	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.50	-5.1533e-01	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.60	4.1555e-02	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.70	8.1076e-01	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.80	1.9485e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.90	3.9614e+00	$(0.5000\ 0.5000)$
2	0.99	1.0818e+01	$(0.5000\ 0.5000)$
3	0.00	-1.0775e+00	$(0.5000\ 0.0001\ 0.5000)$
3	0.10	-1.1200e+00	$(0.4572\ 0.0881\ 0.4547)$
3	0.20	-1.0490e+00	$(0.4234\ 0.1582\ 0.4184)$
3	0.30	-8.5664e-01	$(0.3976\ 0.2123\ 0.3901)$
3	0.40	-5.2993e-01	$(0.3784\ 0.2530\ 0.3686)$
3	0.50	-4.5524e-02	$(0.3646\ 0.2827\ 0.3527)$
3	0.60	6.4034e-01	$(0.3551\ 0.3037\ 0.3413)$
3	0.70	1.6161e+00	$(0.3487\ 0.3179\ 0.3334)$
3	0.80	3.0890e+00	$(0.3447\ 0.3268\ 0.3285)$
3	0.90	5.7338e+00	$(0.3426\ 0.3316\ 0.3257)$
3	0.99	1.4844e+01	$(0.3419\ 0.3333\ 0.3248)$
4	0.00	-9.0232e-01	$(0.5000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.5000)$
4	0.10	-9.7323e-01	$(0.4532\ 0.0493\ 0.0473\ 0.4502)$
4	0.20	-9.1806e-01	$(0.4094\ 0.0958\ 0.0922\ 0.4027)$
4	0.30	-7.2061e-01	$(0.3709\ 0.1372\ 0.1323\ 0.3596)$
4	0.40	-3.5838e-01	$(0.3388\ 0.1725\ 0.1663\ 0.3225)$
4	0.50	2.0222e-01	$(0.3137\ 0.2009\ 0.1933\ 0.2921)$
4	0.60	1.0182e+00	$(0.2953\ 0.2227\ 0.2136\ 0.2684)$
4	0.70	2.2009e+00	$(0.2827\ 0.2384\ 0.2278\ 0.2511)$
4	0.80	4.0092e+00	$(0.2748\ 0.2487\ 0.2369\ 0.2395)$
4	0.90	7.2858e+00	$(0.2705\ 0.2545\ 0.2420\ 0.2329)$
4	0.99	1.8650e+01	$(0.2690\ 0.2566\ 0.2438\ 0.2306)$
5	0.00	-8.9599e-01	$(0.5000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.5000)$
5	0.10	-9.7706e-01	$(0.4528\ 0.0457\ 0.0085\ 0.0432\ 0.4498)$
5	0.20	-9.1931e-01	$(0.4068\ 0.0840\ 0.0307\ 0.0790\ 0.3995)$
5	0.30	-7.0254e-01	$(0.3634\ 0.1164\ 0.0607\ 0.1088\ 0.3506)$
5	0.40	-2.9642e-01	$(0.3204\ 0.1408\ 0.0923\ 0.1340\ 0.3125)$
5	0.50	3.4378e-01	$(0.2834\ 0.1596\ 0.1223\ 0.1547\ 0.2799)$
5	0.60	1.2907e+00	$(0.2546\ 0.1745\ 0.1483\ 0.1706\ 0.2520)$
5	0.70	2.6805e+00	$(0.2349\ 0.1866\ 0.1691\ 0.1814\ 0.2278)$
5	0.80	4.8248e+00	$(0.2256\ 0.1977\ 0.1848\ 0.1868\ 0.2051)$
5	0.90	8.7344e+00	$(0.2298\ 0.2116\ 0.1968\ 0.1851\ 0.1767)$
5	0.99	2.2352e+01	$(0.2302\ 0.2157\ 0.2007\ 0.1849\ 0.1684)$
6	0.00	-1.0053e+00	$(0.4999\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0001\ 0.4999)$
6	0.10	-1.0886e+00	$(0.4528\ 0.0453\ 0.0049\ 0.0045\ 0.0428\ 0.4497)$
6	0.20	-1.0184e+00	$(0.4063\ 0.0818\ 0.0190\ 0.0176\ 0.0764\ 0.3989)$
6	0.30	-7.7258e-01	$(0.3587\ 0.1090\ 0.0397\ 0.0375\ 0.1023\ 0.3529)$
6	0.40	-3.1558e-01	$(0.3107\ 0.1269\ 0.0631\ 0.0613\ 0.1229\ 0.3150)$
6	0.50	4.0800e-01	$(0.2683\ 0.1394\ 0.0876\ 0.0866\ 0.1388\ 0.2793)$
6	0.60	1.4870e+00	$(0.2330\ 0.1482\ 0.1107\ 0.1106\ 0.1504\ 0.2471)$
6	0.70	3.0837e+00	$(0.2069\ 0.1551\ 0.1306\ 0.1308\ 0.1577\ 0.2188)$
6	0.80	5.5636e+00	$(0.1921\ 0.1624\ 0.1471\ 0.1459\ 0.1601\ 0.1924)$
6	0.90	1.0107e+01	$(0.1920\ 0.1741\ 0.1618\ 0.1553\ 0.1550\ 0.1616)$
6	0.99	2.5981e+01	$(0.2080\ 0.1925\ 0.1762\ 0.1592\ 0.1414\ 0.1227)$
7	0.00	-1.2064e+00	$(0.5000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.5000)$
7	0.10	-1.2881e+00	$(0.4528\ 0.0453\ 0.0046\ 0.0008\ 0.0041\ 0.0427\ 0.4497)$
7	0.20	-1.1998e+00	$(0.4062\ 0.0813\ 0.0168\ 0.0060\ 0.0150\ 0.0759\ 0.3988)$
7	0.30	-9.1845e-01	$(0.3564\ 0.1063\ 0.0334\ 0.0169\ 0.0306\ 0.1007\ 0.3557)$
7	0.40	-4.0458e-01	$(0.3066\ 0.1214\ 0.0519\ 0.0333\ 0.0495\ 0.1192\ 0.3182)$
7	0.50	4.0639e-01	$(0.2612\ 0.1300\ 0.0713\ 0.0540\ 0.0703\ 0.1322\ 0.2811)$
7	0.60	1.6191e+00	$(0.2218\ 0.1342\ 0.0899\ 0.0764\ 0.0909\ 0.1406\ 0.2462)$
7	0.70	3.4227e+00	$(0.1910\ 0.1365\ 0.1067\ 0.0976\ 0.1089\ 0.1447\ 0.2146)$
7	0.80	6.2378e+00	$(0.1716\ 0.1400\ 0.1215\ 0.1154\ 0.1223\ 0.1442\ 0.1850)$
7	0.90	1.1415e+01	$(0.1678\ 0.1491\ 0.1363\ 0.1295\ 0.1292\ 0.1362\ 0.1517)$
7	0.99	2.9548e+01	$(0.1955\ 0.1793\ 0.1623\ 0.1445\ 0.1260\ 0.1065\ 0.0860)$

Table 10 A–optimal constrained designs for $r = 0.05$, $\text{Eff}_\text{D} \geqslant 0.97$.

S	ρ	Opt	ξ_Opt
2	0.00	1.4528e+01	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.10	1.4126e+01	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.20	1.3340e+01	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.30	1.2223e+01	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.40	1.0852e+01	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.50	9.3075e+00	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.60	7.6622e+00	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.70	5.9750e+00	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.80	4.2871e+00	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.90	2.6244e+00	$(0.4495\ 0.5505)$
2	0.99	1.1606e+00	$(0.4494\ 0.5506)$
3	0.00	1.2540e+01	$(0.4142\ 0.0000\ 0.5858)$
3	0.10	1.2719e+01	$(0.3787\ 0.0717\ 0.5496)$
3	0.20	1.2579e+01	$(0.3476\ 0.1350\ 0.5174)$
3	0.30	1.2071e+01	$(0.3220\ 0.1860\ 0.4920)$
3	0.40	1.1195e+01	$(0.3018\ 0.2253\ 0.4729)$
3	0.50	9.9920e+00	$(0.2862\ 0.2547\ 0.4591)$
3	0.60	8.5232e+00	$(0.2748\ 0.2757\ 0.4495)$
3	0.70	6.8501e+00	$(0.2668\ 0.2901\ 0.4431)$
3	0.80	5.0214e+00	$(0.2617\ 0.2991\ 0.4392)$
3	0.90	3.0674e+00	$(0.2588\ 0.3041\ 0.4371)$
3	0.99	1.2118e+00	$(0.2578\ 0.3059\ 0.4363)$
4	0.00	1.3378e+01	$(0.4134\ 0.0000\ 0.0000\ 0.5866)$
4	0.10	1.3615e+01	$(0.3793\ 0.0323\ 0.0425\ 0.5459)$
4	0.20	1.3655e+01	$(0.3415\ 0.0685\ 0.0875\ 0.5025)$
4	0.30	1.3399e+01	$(0.3058\ 0.1026\ 0.1288\ 0.4628)$
4	0.40	1.2768e+01	$(0.2739\ 0.1325\ 0.1648\ 0.4288)$
4	0.50	1.1726e+01	$(0.2471\ 0.1570\ 0.1943\ 0.4015)$
4	0.60	1.0284e+01	$(0.2259\ 0.1758\ 0.2172\ 0.3810)$
4	0.70	8.4726e+00	$(0.2103\ 0.1893\ 0.2337\ 0.3666)$
4	0.80	6.3222e+00	$(0.1999\ 0.1981\ 0.2447\ 0.3573)$
4	0.90	3.8395e+00	$(0.1940\ 0.2030\ 0.2508\ 0.3522)$
4	0.99	1.3014e+00	$(0.1918\ 0.2048\ 0.2531\ 0.3503)$
5	0.00	1.4987e+01	$(0.4134\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.5866)$
5	0.10	1.5214e+01	$(0.3817\ 0.0296\ 0.0025\ 0.0400\ 0.5462)$
5	0.20	1.5314e+01	$(0.3434\ 0.0588\ 0.0197\ 0.0791\ 0.4990)$
5	0.30	1.5186e+01	$(0.3049\ 0.0842\ 0.0449\ 0.1133\ 0.4527)$
5	0.40	1.4714e+01	$(0.2681\ 0.1057\ 0.0740\ 0.1426\ 0.4096)$
5	0.50	1.3799e+01	$(0.2349\ 0.1232\ 0.1031\ 0.1668\ 0.3720)$
5	0.60	1.2380e+01	$(0.2070\ 0.1367\ 0.1289\ 0.1859\ 0.3415)$
5	0.70	1.0431e+01	$(0.1856\ 0.1465\ 0.1495\ 0.2000\ 0.3185)$
5	0.80	7.9312e+00	$(0.1708\ 0.1529\ 0.1639\ 0.2095\ 0.3029)$
5	0.90	4.8267e+00	$(0.1622\ 0.1566\ 0.1724\ 0.2149\ 0.2939)$
5	0.99	1.4202e+00	$(0.1591\ 0.1580\ 0.1755\ 0.2168\ 0.2907)$
6	0.00	1.6946e+01	$(0.4134\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.5866)$
6	0.10	1.7155e+01	$(0.3839\ 0.0294\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0395\ 0.5473)$
6	0.20	1.7275e+01	$(0.3459\ 0.0580\ 0.0090\ 0.0111\ 0.0776\ 0.4984)$
6	0.30	1.7217e+01	$(0.3070\ 0.0807\ 0.0249\ 0.0294\ 0.1091\ 0.4490)$
6	0.40	1.6855e+01	$(0.2684\ 0.0983\ 0.0456\ 0.0528\ 0.1342\ 0.4007)$
6	0.50	1.6048e+01	$(0.2320\ 0.1112\ 0.0686\ 0.0787\ 0.1535\ 0.3559)$
6	0.60	1.4667e+01	$(0.2001\ 0.1204\ 0.0912\ 0.1037\ 0.1676\ 0.3170)$
6	0.70	1.2611e+01	$(0.1745\ 0.1267\ 0.1106\ 0.1251\ 0.1774\ 0.2858)$
6	0.80	9.7755e+00	$(0.1564\ 0.1308\ 0.1251\ 0.1409\ 0.1835\ 0.2633)$
6	0.90	6.0013e+00	$(0.1459\ 0.1331\ 0.1340\ 0.1506\ 0.1868\ 0.2496)$
6	0.99	1.5673e+00	$(0.1420\ 0.1341\ 0.1374\ 0.1541\ 0.1880\ 0.2444)$
7	0.00	1.9118e+01	$(0.4134\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.5866)$
7	0.10	1.9310e+01	$(0.3856\ 0.0282\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0376\ 0.5486)$
7	0.20	1.9436e+01	$(0.3481\ 0.0585\ 0.0075\ 0.0002\ 0.0096\ 0.0773\ 0.4989)$
7	0.30	1.9418e+01	$(0.3093\ 0.0808\ 0.0203\ 0.0088\ 0.0252\ 0.1079\ 0.4477)$
7	0.40	1.9134e+01	$(0.2703\ 0.0969\ 0.0367\ 0.0236\ 0.0451\ 0.1309\ 0.3964)$
7	0.50	1.8420e+01	$(0.2325\ 0.1075\ 0.0553\ 0.0437\ 0.0673\ 0.1468\ 0.3468)$
7	0.60	1.7091e+01	$(0.1982\ 0.1138\ 0.0743\ 0.0664\ 0.0895\ 0.1565\ 0.3013)$
7	0.70	1.4960e+01	$(0.1699\ 0.1174\ 0.0915\ 0.0882\ 0.1090\ 0.1615\ 0.2626)$
7	0.80	1.1819e+01	$(0.1496\ 0.1196\ 0.1052\ 0.1059\ 0.1237\ 0.1632\ 0.2328)$
7	0.90	7.3515e+00	$(0.1378\ 0.1211\ 0.1141\ 0.1174\ 0.1327\ 0.1632\ 0.2136)$
7	0.99	1.7435e+00	$(0.1334\ 0.1219\ 0.1177\ 0.1219\ 0.1361\ 0.1629\ 0.2061)$